|  |  |
| --- | --- |
| Asignatura | Cálculo Diferencia e Integral I |

**Tema: Métodos de integración**

Pantalla 1

Con seguridad has escuchado que se les llama antiderivadas a las integrales, precisamente porque operativamente son opuestas a las derivadas. Esto significa que debemos tener nociones de derivadas para entrar al mundo de las integrales.

¿Has jugado a adivinar una palabra o personaje a partir de ciertas pistas?

Entendamos el proceso de integración de funciones como un juego entre dos personas, en el que una de ellas debe elegir una función y la otra persona debe adivinarla.

**Un periódico con la foto de un grupo de personas

Descripción generada automáticamente con confianza mediaLee la siguiente conversación entre dos personajes que probablemente has visto.**

***¿Por qué no descrubrió Reese la función de Malcom?***

***¿Reese hizo un razonamiento erróneo?, ¿ Malcom engañó a Reese?***

Reese respondió acertadamente que es derivada de la función , lo que no tomó en cuenta es que también es derivada de las funciones y por supuesto, de la función que Malcom eligió .

Texto

Descripción generada automáticamente

Cuando resolvemos una integral, estamos jugando el papel de Rise, es decir, nos toca adivinar la función que se tenía antes de ser derivada y como no tendremos certeza de si había alguna constante en la función elegida (llamada función primitiva) debemos agregar una constante de integración.

**Función primitiva**

Sea una función real de variable real definida en un intervalor cerrado dentro de los reales. Se llama ***función primitiva*** de a otra función cuya derivada es en dicho intervalo.

**Integral indefinida**

Se llama integral indefinida de al conjunto de todas las funciones primitivas de y se representa por

Si es una primitiva de , entonces se cumple que:

**Integrales inmediatas**

Para calcular una integral es necesario conocer las derivadas de distintas funciones, pues hay que determinar aquella función cuya derivada es la función que está dentro de la integral, por lo que es necesario el ejercicio inverso al de obtener la derivada de una función. Se puede construir una tabla con las integrales que se conocen de manera inmediata a partir de las derivadas de funciones conocidas. A estas integrales cuya primitiva es fácil de conocer se le llaman integrales inmediatas.

**Construcción de reglas de integración**

**Actividad**: Arrastra y coloca cada una de las siguientes tarjetas en la posición que complete adecuadamente la regla de integración a partir de responder a la pregunta: ¿De qué función es derivada la función del integrando ?

**Imagen que contiene Texto

Descripción generada automáticamente Texto

Descripción generada automáticamente con confianza media Imagen que contiene Texto

Descripción generada automáticamente Imagen que contiene Texto

Descripción generada automáticamente**

**Diagrama

Descripción generada automáticamente con confianza media Texto

Descripción generada automáticamente con confianza media Imagen que contiene Texto

Descripción generada automáticamente**

**Imagen que contiene Texto

Descripción generada automáticamente Imagen que contiene objeto, reloj

Descripción generada automáticamente Imagen que contiene Texto

Descripción generada automáticamente Diagrama

Descripción generada automáticamente con confianza media**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | **Imagen que contiene Texto  Descripción generada automáticamente** |
|  | **Imagen que contiene Texto  Descripción generada automáticamente** |
|  | **Diagrama  Descripción generada automáticamente con confianza media** |
|  | **Diagrama  Descripción generada automáticamente con confianza media** |
|  | **Texto  Descripción generada automáticamente con confianza media** |
|  | **Texto  Descripción generada automáticamente con confianza media** |
|  | **Imagen que contiene Texto  Descripción generada automáticamente** |
|  | **Imagen que contiene Texto  Descripción generada automáticamente** |
|  | **Imagen que contiene Texto  Descripción generada automáticamente** |
|  | **Imagen que contiene Texto  Descripción generada automáticamente** |
|  | **Imagen que contiene objeto, reloj  Descripción generada automáticamente** |

Pantalla 2

**Métodos de integración**

Existen algunas integrales que no son rápidas de resolver, y que requieren el empleo de ciertas metodologías para construir su solución.

* **Método de integración por Cambio de variable**

Texto

Descripción generada automáticamente

Resolvamos la integral

A primera instancia, parece una integral tan sencilla como , sin embargo, al no ser el exponente una simple , entonces debemos reconocerla como una nueva variable , por lo que nuestra regla se ha actualizado a:

Procedamos entonces:

De acuerdo con la fórmula, debemos llamar al exponente de la función, además, debe estar multiplicando a su diferencial para poder integrar.

Si tenemos

Nos damos cuenta de que en la integral hace falta multiplicar por 5 para tener completa la diferencial, sin embargo, también se divide por 5, de manera que integral no se altere.

Ahora podemos integrar

Para terminar, expresamos en términos de la variable original :

**Actividad**: Determina la solución de cada una de las siguientes integrales indefinidas.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

***Profundización en el tema***

Para profundizar en este método con más ejercicios, revisa el video “Integración por cambio de variable”, disponible en el enlace: <https://youtu.be/zw2HAwkhOaI>

**Actividad**: Ahora, resuelve las siguientes integrales y escribe dentro del cuadrado la letra **A** si la respuesta correcta es la de color **amarillo** o **V** si es la de color **verde**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Integral** | **Opciones de respuesta** |
|  |  |  |
| A |
|  |
|  |  |  |
| A |
|  |
|  |  |  |
| V |
|  |
|  |  |  |
| V |
|  |
|  |  |  |
| A |
|  |

* **Método de integración por partes**

**Interfaz de usuario gráfica, Texto

Descripción generada automáticamente**

Las funciones que se multiplican en el integrando se llaman y .

Donde

*Elección de y*

La elección de las funciones del integrando como y es importante, pues si no se hace adecuadamente, se tendrá un proceso de integración más complejo. Según el tipo de funciones que se tengan, aquella que esté más arriba en la siguiente tabla tiene preferencia para ser elegida como .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Preferencia para elegir** | **Tipo de función** | **Ejemplo** |
| Inversas |  |
| Logarítmicas |  |
| Algebraicas |  |
| Trigonométricas |  |
| Exponenciales |  |

**Ejemplo.**

Resolvamos la siguiente integral

Una función es algebraica y la otra exponencial, por lo que:

Tabla

Descripción generada automáticamente

Luego, sustituimos en la fórmula de integración por partes

Concluimos resolviendo la integral pendiente:

***Profundización en el tema***

Para profundizar en este método con ejercicios más elaborados, consulta el video “Integración por partes”, disponible en el enlace: <https://youtu.be/SXFT7Af69QU>

**Actividad**: Después de ver el video, resuelve las siguientes integrales y escribe dentro de cada uno de los cuadrados de la izquierda una **A**, si la repuesta correcta es la de color **azul**, o una **M**, si es la de color **morado.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Integral** | **Opciones de respuesta** |
|  |  |  |
| M |
|  |
|  |  |  |
| M |
|  |
|  |  |  |
| M |
|  |
|  |  |  |
| A |
|  |

* **Método de integración por fracciones parciales**

**Interfaz de usuario gráfica, Texto

Descripción generada automáticamente**

***Sistematización del método***

Para resolver integrales con este método se deben seguir los siguientes pasos:

1. **Identificar el caso de descomposición que asignando una letra por cada factor del denominador.** Existen principalmente 3 casos y dependiendo de cual se tenga, se hará el acomodo de las letras, como se muestra:

i) Factores que originan raíces distintas

ii) Factores que originan raíces repetidas

iii) Factores que originan raíces complejas (comúnmente suma de cuadrados).

**El número de letras asignadas debe ser igual al grado del polinomio del denominador*.***

2) Multiplicar ambos miembros de la igualdad por el denominador factorizado.

3) Plantear y resolver un sistema de ecuaciones para determinar el valor de cada letra; dichos valores serán sustituidos en las fracciones simples.

4) Integrar cada una de las fracciones simples.

Pantalla 3

Para ejemplificar el procedimiento anterior, resolvamos la siguiente integral:

1) Es el caso 1 porque los factores del denominador son diferentes; debemos asignar dos letras y porque el denominador es de segundo grado, entonces:

2) Multiplicamos la ecuación por el denominador factorizado

Diagrama

Descripción generada automáticamente

3) Planteamos el sistema de ecuaciones

Al resolver el sistema de ecuaciones, se encuentra que y

Sustituyendo en las integrales queda:

Luego:

4) Completamos lo que falte de la diferencial, para poder aplicar un cambio de variable, usando la regla de integración

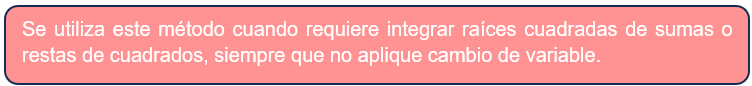
***Profundización en el tema***

Para profundizar en este método con más ejercicios consulta el video “Integración por fracciones parciales”, disponible en el enlace: <https://youtu.be/ASRWHY3rKPk>

**Actividad**: Después de ver el video, resuelve las siguientes integrales y escribe dentro de cada uno de los cuadrados de la izquierda una **A**, si la repuesta correcta es la de color **amarillo**, o una **M**, si es la de color **morado.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Integral** | **Opciones de respuesta** |
|  |  |  |
| A |
|  |
|  |  |  |
| M |
|  |
|  |  |  |
| A |
|  |

* **Método de integración por sustitución trigonométrica**

****

|  |  |
| --- | --- |
| **Relación entre los lados del triángulo** | **Razones trigonométricas** |
| * Despejando la hipotenusa:   Cuando se deba integrar la raíz de una suma de cuadrados, ésta será una hipotenusa. |  |
| * Despejando un cateto:   Cuando se deba integrar la raíz de una resta de cuadrados, esta será un cateto. |

**Imagen que contiene Gráfico

Descripción generada automáticamenteJustificación**

**Teorema de Pitágoras**

***Sistematización***

Explicaremos los pasos a seguir, a partir de la resolución de la siguiente integral:

|  |  |
| --- | --- |
| **1) Construir el triángulo:** | **2) Definir 2 razones trigonométricas:** |
| Observamos que en la integral hay una raíz cuadrada de una suma de cuadrados, por lo que esta raíz representa a la hipotenusa. | i) en la primera se relaciona la medida constante con la raíz:  ii) en la segunda se relaciona la medida constante con el otro lado variable del triángulo, en este caso  Luego, al derivar tenemos: |
| **3) Sustituir las partes en la integral** | **4) Resolver la integral** |
|  |  |
| **5) Expresar la integral en términos de la variable original** |
|  |
| NOTAS:   * El nombramiento de los catetos con medidas y , pudo haberse hecho invertido, lo cual ocasionaría la obtención de un resultado aparentemente diferente, pero éste es equivalente. * En las 2 razones trigonométricas que se definan, conviene usar aquellas en las que la variable esté en el numerador. | |

***Profundización en el tema***

Para profundizar en este método con más ejercicios ve el video “Integración por sustitución trigonométrica”, disponible en el enlace: <https://youtu.be/bt8mXM9fX-Y>

**Actividad**: Después de ver el video, resuelve las siguientes integrales y escribe dentro de cada uno de los cuadrados de la izquierda una **A**, si la repuesta correcta es alguna de las de color **azul**, o una V, si es algunas de las de color **verde.**

*Nota: recuerda que hay dos maneras correctas de estructurar la repuesta, dependiendo del acomodo que hayas hecho de los catetos en el triángulo, por lo que basta con llegar a alguna de las respuestas indicadas en cada color.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Integral** | **Opciones de respuesta** |
|  |  |  |
| V |
|  |
|  |  |  |
| A |
|  |
|  |  |  |
| A |
|  |